Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

29.03.2003.

Други разред – А категорија

1. Доказати да квадратне једначине $ax^2+bx+c=0$ и $bx^2+cx+a=0$, $a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq 0, b\neq 0$, имају заједничко решење ако и само ако важи $a^3+b^3+c^3=3abc$.

2. Нека је S подскуп скупа реалних бројева који је затворен у односу на множење (то значи кад год су $a,b\in S$, онда је и $a\cdot b\in S$). Нека су T и U дисјунктни подскупови скупа S, чија је унија цео скуп S. Познато је да производ ма која три елемента скупа T (не обавезно различита) припада скупу T и да призвод ма која три елемента из U припада скупу U. Доказати да је бар један од подскупова T и U затворен у односу на множење.

3. Нека су a,b,c реални бројеви, такви да је $0<a\leqslant b\leqslant c$. Доказати да важи

$$(a+3b)(b+4c)(c+2a)\geqslant 60abc.$$

Када важи једнакост?

4. Да ли је могуће једнакостранични троугао странице 3 разрезати на 2003 дисјунктна троугла, тако да сваки од њих има све странице веће од 1?

5. Круг k у тачкама P и Q додирује краке угла $\sphericalangle pOq$. На полуправој Oq је дата тачка X, тако да пресечна тачка Z круга k и праве PX различита од P полови дуж PX. Ако је Y пресечна тачка круга k и праве OZ различита од Z, доказати да је $PX\parallel QY$.

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

29.03.2003.

Други разред – Б категорија

1. У скупу реалних бројева решити једначину

$$(x-1)\sqrt[3]{\frac{x-1}{3-x}}+(3-x)\sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}}=2.$$

2. Нека је S подскуп скупа реалних бројева који је затворен у односу на множење (то значи кад год су $a, b \in S$, онда је и $a \cdot b \in S$). Нека су T и U дисјунктни подскупови скупа S, чија је унија цео скуп S. Познато је да производ ма која три елемента скупа T(не обавезно различита) припада скупу T и да призвод ма која три елемента из U припада скупу U. Доказати да је бар један од подскупова T и U затворен у односу на множење.

3. Дата је квадратна једначина $ax^2+bx+c=0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Ако су оба решења једначине реална и припадају интервалу $(0,1)$, доказати да је $a(2c+b)<0$.

4. У кружни одсечак коме одговара централни угао од 120° уписан је квадрат. Одредити дужину странице квадрата, ако је полупречник круга $2+\sqrt{19}$.

5. Доказати да је број $\left(\sqrt[6]{8\sqrt{5}+16}+\sqrt{\sqrt{5}+1}\right)\cdot\sqrt{\sqrt{5}-1}$ цео и израчунати га.

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.