Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

29.03.2003.

Трећи разред – А категорија

1. **а)** Да ли постоји неконстантан низ природних бројева $a_1, a_2, \ldots$ такав да за свако $k \geqslant 2$ важи

$$a_k = \frac{2a_{k-1}a_{k+1}}{a_{k-1} + a_{k+1}}?$$

б) Да ли постоји неконстантан низ природних бројева $a_1, a_2, \ldots, a_{2003}$ такав да за свако $2 \leqslant k \leqslant 2002$ важи

$$a_k = \frac{2a_{k-1}a_{k+1}}{a_{k-1} + a_{k+1}}?$$

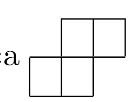
2. Нека је $p > 2$ прост број. Доказати да је сваки делилац броја $2^p - 1$ облика $2kp + 1$ за неко природно k.

3. Нека је O центар описане кружнице, а T тежиште троугла ABC, који није једнакостраничан. Доказати да је OT нормална на тежишну дуж CC_1 ако и само ако за странице троугла важи $BC^2 + CA^2 = 2AB^2$.

4. Нека је $n \geqslant 3$, а $a_1, a_2, \ldots, a_n$ реални бројеви такви да је $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant 0$. Доказати да важи

$$a_1a_2a_3 + a_2a_3a_4 + \ldots + a_{n-2}a_{n-1}a_n \leqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{3}\right)^3.$$

Када важи једнакост?

5. Колико се највише фигура подударних са  може поставити у таблу 2003×2003 без преклапања тако да свака фигура покрива тачно 4 јединична поља?

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

29.03.2003.

Трећи разред – Б категорија

1. Израчунати дужину полупречника лопте уписане у тространу пирамиду $SABC$, ако су ивице SA,SB и SC међусобно нормалне и $AB = BC = a, BS = b$.

2. Решити систем у зависности од реалног параметра a:

$$\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & 6y & + & z & = & 1 \\ x & + & 6ay & + & z & = & 6 \\ x & + & 6y & + & az & = & 1. \end{array}$$

3. Нека су a, b, c, d странице, а P површина конвесног четвороугла. Доказати да важи $P \leqslant \dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}$. Када важи једнакост?

4. Нека је E средиште странице AB квадрата $ABCD$, а F и G тачке на страницама BC и CD, редом, такве да је $EF \| AG$. Доказати да је FG тангента на круг уписан у квадрат $ABCD$.

5. Ако за оштре углове α, β и γ важи $\cos\alpha = \mathrm{tg}\beta$, $\cos\beta = \mathrm{tg}\gamma$ и $\cos\gamma = \mathrm{tg}\alpha$, доказати да је $\sin\alpha = \sin\beta = \sin\gamma = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.