

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

29.03.2003.

Четврти разред – А категорија

1. Наћи скуп свих могућих позитивних реалних бројева V таквих да постоји правоугли паралелепипед са следећим особинама: његова запремина је V , површина 18, а сума растојања од центра до страна је 6.
2. Нека је $p > 2$ прост број. Доказати да је сваки делилац броја $2^p - 1$ облика $2kp + 1$ за неко природно k .
3. Нека је O центар описане кружнице, а T тежиште троугла ABC , који није једнакостраничан. Доказати да је OT нормална на тежишну дуж CC_1 ако и само ако за стране троугла важи $BC^2 + CA^2 = 2AB^2$.
4. Нека је $n \geq 3$, а a_1, a_2, \dots, a_n реални бројеви такви да је $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$. Доказати да важи

$$a_1 a_2 a_3 + a_2 a_3 a_4 + \dots + a_{n-2} a_{n-1} a_n \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{3} \right)^3.$$

Када важи једнакост?

5. На кружници је дато n тачака. Никоје три дужи које се добијају спајањем ових тачака се не секу у једној тачки унутар круга. На колико области ове дужи деле круг?

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

29.03.2003.

Четврти разред – Б категорија

1. Наћи скуп свих могућих позитивних реалних бројева V таквих да постоји правоугли паралелепипед са следећим особинама: његова запремина је V , површина 18, а сума растојања од центра до страна је 6.

2. Наћи $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x^{2003} - 1) - 2003(x - 1)}{(x - 1)^2}$.

3. Решити систем

$$x - y + z = 6, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 14, \quad x^3 - y^3 + z^3 = 36.$$

4. Одредити тачку на елипси $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{18} = 1$ у првом квадранту, такву да тангента на елипсу у тој тачки гради са координатним осама троугао најмање површине.

5. Дат је низ тачака $T_i(x_i, y_i)$ у xOy равни, тако да је

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 0 \text{ и } x_{n+1} = \sqrt{3}x_n - y_n, \quad y_{n+1} = x_n + \sqrt{3}y_n \text{ за } n \geq 0.$$

У ком квадранту се налази тачка T_{2003} ?

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.