РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28.01.2006.

Други разред – А категорија

1. Одредити све целе бројеве a за које су изрази $96+a$ и $5+a$ кубови целих бројева. (**М405**)

Решење 1: Нека је a цео број такав да је $96+a=x^3$ и $5+a=y^3$, за неке целе бројеве x и y. Тада је $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)=91$.

Нека је $x-y=m$, за неки цео број m (очигледно $m\in\{\pm1,\pm7,\pm13,\pm91\}$). Тада је $x=m+y$ и $x^2+xy+y^2=\dfrac{91}{m}$, па је

$$(m+y)^2+(m+y)y+y^2=\frac{91}{m},\quad \text{тј.}\quad 3y^2+3my+\left(m^2-\frac{91}{m}\right)=0.$$

Дискриминанта последње једначине, $D=\dfrac{3}{m}\left(364-m^3\right)$, мора бити потпун квадрат. За $m>7$ имамо да је $\dfrac{3}{m}>0$ и $364-m^3<0$, па је $D<0$. Такође, за $m<0$ имамо $\dfrac{3}{m}<0$ и $364-m^3>0$, па је, поново, $D<0$. Дакле, $0<m\leqslant 7$, па је $m=1$ или $m=7$. За $m=1$, $D=1089=33^2$, па $y\in\{-6,5\}$, односно $a\in\{-221,120\}$. За $m=7$, $D=9=3^2$, па $y\in\{-3,-4\}$, односно $a\in\{-32,-69\}$.

Дакле, $a\in\{-221,-69,-32,120\}$.

Решење 2: Као и у првом решењу, задатак се своди на решавање (у целим бројевима) једначине $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)=91$. Имајући у виду да је $x>y$ закључујемо да је $x-y$ један од позитивних делилаца броја 91. Постоје 4 могућности,

$$\begin{cases} x-y = 1 \\ x^2+xy+y^2 = 91 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y = 7 \\ x^2+xy+y^2 = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y = 13 \\ x^2+xy+y^2 = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y = 91 \\ x^2+xy+y^2 = 1 \end{cases}$$

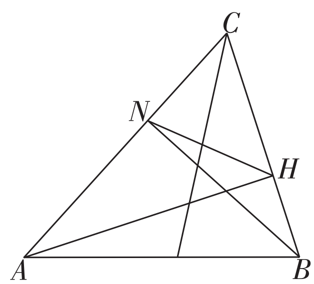
Први систем има једно решење $x=6, y=5$ и друго $x=-5, y=-6$. Други систем има решења $x=3, y=-4$ и $x=4, y=-3$. Трећи и четврти немају решења у целим бројевима. Одавде се повратно добијају вредности за a и одговор као и у првом решењу.

2. Може ли се једнакостранични троугао поделити на 2006 једнакостраничних троуглова? (**M327**)

Решење: Видети решење истог задатка за први разред у А категорији (задатак **5.**).

3. Наћи $\sphericalangle ACB$ оштроуглог $\triangle ABC$ ако је познато да дуж HN, која спаја подножја висина AH и BN, полови симетралу $\sphericalangle ACB$. (**M436**)

Решење: Како је $\dfrac{HC}{AC} = \cos\gamma = \dfrac{NC}{BC}$ $(\gamma = \sphericalangle ACB)$, закључујемо да су троуглови HCN и ABC слични са коефицијентом сличности $k = \cos\gamma$ (слика 1). Симетрала угла γ троугла ABC истовремено је и симетрала угла у троуглу HCN. По услову задатка однос дужина симетрала у једном и другом троуглу је $\dfrac{1}{2}$. Како је однос одговарајућих дужинских елемената у сличним троугловима једнак коефицијенту сличности, то је $k = \cos\gamma = \dfrac{1}{2}$, одакле је $\gamma = 60^0$.



Слика 1.

4. Наћи све $x \in \mathbb{R}$ за које је неједначина

$$(1) \qquad (2-a)x^3 + (1-2a)x^2 - 6x + (5+4a-a^2) < 0$$

тачна бар за једну вредност $a \in [-1, 2]$.

Решење: Напишимо леву страну неједначине (1) као квадратну функцију по a,

$$(2) \qquad f(a) = -a^2 + a(4 - 2x^2 - x^3) + 2x^3 + x^2 - 6x + 5.$$

Приметимо да је $f(a)$ увек конкавна функција! Отуда закључујемо да се тражени x може наћи ако и само ако је испуњен бар један од услова

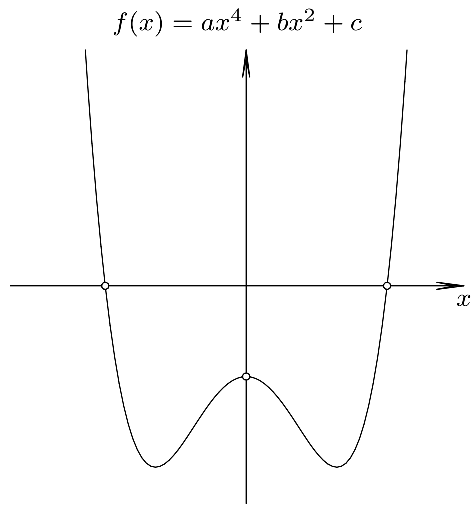
$$f(-1) < 0 \qquad \text{или} \qquad f(2) < 0.$$

Случај $f(-1) < 0$ је еквивалентан са $x(x^2 + x - 2) < 0$ што води ка решењу $x \in (-\infty, -2) \cup (0, 1)$.

Случај $f(2) < 0$ је еквивалентан са $x^2 + 2x - 3 > 0$ што води ка решењу $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$.

Коначно решење је $x \in (-\infty, -2) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

5. На слици је скица графика функције $y = ax^4 + bx^2 + c$. Какве знаке имају коефицијенти a, b и c?



Решење 1: Коефицијент a није нула, јер скицирани график није ни парабола ни хоризонтална права. Како је, због $y = x^4(a + b/x^2 + c/x^4)$, за јако велике x знак функције исти као знак коефицијента a, мора бити $a > 0$. Како је $c = f(0)$, према скици је $c < 0$. Докажимо да је $b < 0$. У супротном је $-b/\{2a\} \leq 0$, па је апсциса темена графика функције $f(x) = ax^2 + bx + c$ непозитивна. Због $a > 0$, функција $f(x)$ расте на $[0, \infty)$.

Одатле следи да и дата функција y расте на истом интервалу, што према скици није тачно. Дакле $b < 0$.

Решење 2: Лако се уочава да је $a > 0$ (за довољно велико x мора бити $f(x) > 0$). Са графика видимо да је $f(0) < 0$, и како је $c = f(0)$ закључујемо и да је $c < 0$. Такође са графика се види да постоји $x_0 > 0$ за које је $f(x_0) < c$. Из последње релације добијамо да је $ax_0^4 + bx_0^2 < 0$ што је могуће само у случају када је $b < 0$. Дакле мора бити $a > 0, b < 0, c < 0$.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28.01.2006.

Други разред – Б категорија

1. Одредити све комплексне бројеве $z = x+iy$, за које важи $|z-2| = |z+2i|$ и $|z+2| = |z-2i|$. (Тан. 41, стр. 27, II.5.)

Решење: Из првог услова се добија $|(x-2)+iy| = |x+(y+2)i|$ одакле се добија $(x-2)^2+y^2 = x^2+(y+2)^2$ тј. $x+y=0$. Други услов је еквивалентан са $|(x+2)+iy| = |x+(y-2)i|$ одакле се добија $(x+2)^2+y^2 = x^2+(y-2)^2$ што је опет еквивалентно са $x+y=0$. Закључак је да тражена својства имају сви комплексни бројеви облика $z = x-ix$, где је x реалан број.

2. За коју вредност параметра m у једначини

$$x^2 - 2mx + 3m^2 - 38m + 156 = 0$$

је једно решење веће од другог? (сличан са Тан. 34, стр. 49)

Решење: Услов је еквивалентан услову да је $D > 0$ где је D дискриминанта једначине. Ова нејдначина се после сређивања своди на неједначину $m^2 - 19m + 78 < 0$. Одговараајуће нуле су 6 и 13 одакле следи да је скуп решења интервал $(6, 13)$.

3. Наћи $\sphericalangle ACB$ оштроуглог $\triangle ABC$ ако је познато да дуж HN, која спаја подножја висина AH и BN, полови симетралу $\sphericalangle ACB$. (**M436**)

Решење: Видети решење истог задатка за други разред у А категорији (задатак **3.**).

4. Доказати да за $m, n \in \mathbb{N}$ важи (И.Т.)

$$n\sqrt{m-1} + m\sqrt{n-1} \leq mn.$$

Решење: За $n \geqslant 1$ је $\frac{\sqrt{n-1}}{n} \leqslant \frac{1}{2}$. Заиста, сменом $n-1 = t^2$, где је према услову $t \geqslant 0$, наведена неједнакост је еквивалентна са $\frac{t}{t^2+1} \leqslant \frac{1}{2}$ што је еквивалентно са $2t \leqslant t^2+1$ односно $0 \leqslant (t-1)^2$. Без увођења смене ово се може доказати и овако $\frac{\sqrt{n-1}}{n} - \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{n-1}-n+1-1}{2n} = \frac{-(\sqrt{n-1}-1)^2}{2n} \leqslant 0$. Слично важи и $\frac{\sqrt{m-1}}{m} \leqslant \frac{1}{2}$ па се сабирањем ових неједнакости добија $\frac{\sqrt{n-1}}{n} + \frac{\sqrt{m-1}}{m} \leqslant 1$ одакле следи тражена неједнакост.

5. Показати да постоји бесконачно много четворки целих позитивних бројева x, y, z, t за које важи:

$$x^3 + y^4 = z^5 + t^6.$$

Решење: Довољно је наћи бесконачно много решења једначина $x^3 = z^5$ и $y^4 = t^6$. У првом случају се решење може потражити у облику $x = a^p$ и $z = a^q$ где је a позитиван цео број. Једначина $x^3 = z^5$ је задовољена ако је $3p = 5q$ што је испуњено ако је $p = 5u$ а $q = 3u$ за неки природан број u. Дакле прву једначину задовољава бесконачно много парова $x = a^{5u}$ и $z = a^{3u}$. Слично, другу једначину задовољавају сви парови $y = b^{3v}$ и $t = b^{2v}$ за неке природне бројеве b и v.