

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА
ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28.01.2006.

Трећи разред – А категорија

1. Решити систем једначина

$$\begin{aligned}\log_2 x + \log_4 y + \log_4 z &= 2 \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x &= 2 \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y &= 2.\end{aligned}$$

Решење: Због дефинисаности логаритма имамо $x, y, z > 0$. Дати систем једначина је еквивалентан са системом

$$\begin{aligned}x\sqrt{yz} &= 4 \\ y\sqrt{zx} &= 9 \\ z\sqrt{xy} &= 16.\end{aligned}$$

Множењем све три једнакости добијамо $(xyz)^2 = 24^2$ тј. $xyz = 24$. Одавде и из претходних једначина лако се добија да је $x = 2/3, y = 27/8$ и $z = 32/3$.

2. Наћи све уређене парове реалних бројева (a, b) такве да је

$$(a + bi)^{2006} = a - bi.$$

Решење: Ако уведемо ознаку $z = a + bi$ једначина прелази у облик $z^{2006} = \bar{z}$. Узимајући модул леве и десне стране добијамо $|z|^{2006} = |z|$. Сада имамо две могућности. Или је $|z| = 0$, у ком случају долазимо до решења $z_0 = 0 + 0i$, или је $|z|^{2005} = 1 \Rightarrow |z| = 1$. У другом случају помножимо обе стране једначине $z^{2006} = \bar{z}$ са z чиме наведена једначина прелази у једначину $z^{2007} = \bar{z}z$, односно једначину $z^{2007} = 1$. Одавде добијамо решења $z_k = \cos \frac{2k\pi}{2007} + i \sin \frac{2k\pi}{2007}$ за $k = 1, 2, \dots, 2007$. Дакле тражени парови су елементи скупа

$$\{(0, 0)\} \cup \left\{ \left(\cos \frac{2k\pi}{2007}, \sin \frac{2k\pi}{2007} \right) \mid k = 1, \dots, 2007 \right\}.$$

3. Ако странице троугла задовољавају релацију $a - b = b - c \geq 0$ доказати да други по величини угао не прелази 60° . (M470)

Решење: Пошто је $a \geq b \geq c$, други по величини угао је β . Према косинусној теорему важи:

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + c^2 - \left(\frac{a+c}{2}\right)^2}{2ac} = \frac{3}{8} \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) - \frac{1}{4}.$$

Из познате неједнакости $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2$, добијамо да је $\cos \beta \geq \frac{3}{8}$.
 $2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, одакле следи да је $\beta \leq 60^\circ$.

4. Нека је $a + b + c = 1$ и нека су a, b, c дужине страница троугла. Доказати да је $a^2 + b^2 + c^2 < \frac{1}{2}$.

Решење: Из Косинусне теореме следи $a^2 + b^2 + c^2 = 2ab \cos \gamma + 2bc \cos \alpha + 2ca \cos \beta < 2(ab + bc + ca)$ што заједно са релацијом $2(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = 1 - (a^2 + b^2 + c^2)$ даје неједнакост $a^2 + b^2 + c^2 \leq 1 - (a^2 + b^2 + c^2)$ еквивалентну траженој неједнакости.

(Тан. 34, стр. 8)

5. Постоје ли природни бројеви x, y и z за које важи:

$$x^3 + y^4 = z^5?$$

Решење: Потражимо решење у облику $x = 2^p, y = 2^q$ и $z = 2^r$ уз додатни услов $3p = 4q$. Последњи услов нам омогућује да тражену једначину сведемо на једначину облика $2^{3p} + 2^{4q} = 2^{5r}$ тј. на једначину $2^{3p+1} = 2^{5r}$.

Дакле довољно је наћи решења система једначина $3p = 4q$ и $3p + 1 = 5r$. Прва једначина има бесконачно много решења $p = 4t, q = 3t$ где је t природан број. Друга једначина је задовољена ако је $12t + 1 = 5r$ тј. ако је нпр. $t = 5k + 2$ за неки природан број k . Одавде добијамо за сваки природан број k решење

$$x = 2^{20k+8} \quad y = 2^{15k+6} \quad z = 2^{12k+5}.$$

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА
ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28.01.2006.

Трећи разред – Б категорија

1. Решити систем једначина

$$\begin{aligned}\log_2 x + \log_4 y + \log_4 z &= 2 \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x &= 2 \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y &= 2.\end{aligned}$$

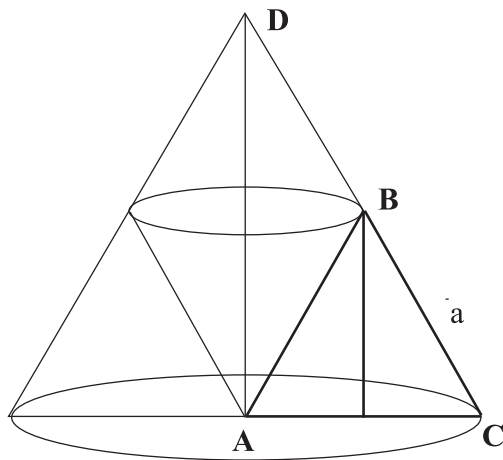
Решење: Видети решење истог задатка за трећи разред у А категорији (задатак 1.).

2. Једнакостранични троугао ABC , странице a , ротира око праве која садржи теме A и паралелна је висини кроз теме B . Израчунати површину и запремину добијеног ротационог тела.

(Тан. 37, стр. 37, III.2.)

Решење: Анализом слике 1 види се да је тражено ротационо тело добијено тако што се из једнакостраничне купе полупречника основе a исече двострука купа полупречника основе $a/2$. Формуле за површину и запремину једнакостраничне купе са полупречником основе r су

$$P_r = 3r^2\pi \quad V_r = \frac{\sqrt{3}}{3}r^3\pi.$$



Слика 1.

Одавде се добија резултат

$$P = 3a^2\pi \quad V = \frac{\sqrt{3}}{3}a^3\pi - 2\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^3\pi = \frac{\sqrt{3}}{4}a^3\pi.$$

3. Ако странице троугла задовољавају релацију

$$a - b = b - c \geq 0$$

доказати да други по величини угао не прелази 60° . (M470)

Решење: Видети решење истог задатка за трећи разред у А категорији (задатак 3.).

4. Одредити скуп решења неједначине $\sin^4 x + \cos^4 x \leq \frac{3}{4}$.
(Тан. 40, стр. 56)

Решење: Из једнакости $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2(2x)$ следи да је наведена неједнакост еквивалентна са $1 - \frac{1}{2}\sin^2(2x) \leq \frac{3}{4}$. После сређивања добијамо неједначину $\frac{1}{2} \leq \sin^2(2x)$ односно еквивалентну неједначину $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq |\sin(2x)|$. Одавде се добија еквивалентна релација $\frac{\pi}{4} + k\pi \leq 2x \leq \frac{3\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ одакле се добија и коначно решење

$$\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

5. На школској табли су слике правилног 12-угла и правилног 15-угла. Оба полигона су уписана у кружнице једнаких полупречника. Ана је обим 12-угла помножила са површином 15-угла а Марија је обим 15-угла помножила са површином 12-угла. Која од њих две је добила већи број?

Решење: Означимо са P_{12} површину 12-угла а са P_{15} површину 15-угла. Слично, нека је O_{12} обим 12-угла а O_{15} обим 15-угла. Анин број је $O_{12} \cdot P_{15}$ а Маријин број је $O_{15} \cdot P_{12}$. Задатак је да се упореде ови бројеви, тј. да се упореде бројеви

$$A = \frac{P_{15}}{O_{15}} \quad \text{и} \quad M = \frac{P_{12}}{O_{12}}.$$

Разбијањем полигона на једнакокраке троуглове лако се налази да је $A = h_{15}/2$ и $M = h_{12}/2$ где су $h_{15} = r \cos \frac{\pi}{15}$ и $h_{12} = r \cos \frac{\pi}{12}$ висине одговарајућих троуглова. Пошто су краци ових једнакокраких троуглова једнаки, закључујемо да је $A > M$.