РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28.01.2006.

Четврти разред – А категорија

1. Нека је функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задата формулом $f(x) = 3\sin x + 4\cos x$. Одредити максималну и минималну вредност ове функције.

Решење 1: Уочимо да је

$$f(x) = 5(\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x) = 5\sin(x+\alpha)$$

где је α угао одређен условом $\cos\alpha = 3/5, \sin\alpha = 4/5, 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$. Одавде се одмах добија да су максимум (минимум) ове функције 5 (односно -5).

Решење 2: Први извод функције f је $f'(x) = 3\cos x - 4\sin x$. Нуле извода су нуле једначине $\operatorname{tg} x = 3/4$ и у неким од ових тачака функција достиже максималну а у неким минималну вредност (овде се ослањамо на периодичност функције). Ако је $\operatorname{tg} x = 3/4$ онда се показује да су одговарајуће вредности синуса и косинуса $\sin x = 3/5, \cos x = 4/5$ или $\sin x = -3/5, \cos x = -4/5$. Одавде зе закључује да су максимум и минимум функције f редом 5 и -5.
Напомена: Може се анализирати и други извод функције али се опет закључак да је један од локалних максимума (минимума) и глобални максимум (минимум) изводи из периодичности функције.

2. Наћи највећу вредност функције

$$f(x) = \frac{x}{x^2+9} + \frac{1}{x^2-6x+21} + \cos 2\pi x$$

на интервалу $(0, +\infty)$. (**M375**)

Решење: Посматрајмо прво све сабирке појединачно. Како је

$$\frac{x}{x^2+9} = \frac{1}{x+\frac{9}{x}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{x\frac{9}{x}}} = \frac{1}{6},$$

закључујемо да је највећа вредност првог сабирка $\frac{1}{6}$ и она се постиже за $x = 3$, док из

$$\frac{1}{x^2-6x+21} = \frac{1}{(x-3)^2+12} \leqslant \frac{1}{12},$$

закључујемо да је највећа вредност другог сабирка $\frac{1}{12}$ и да се она постиже за $x=3$. Највећа вредност трећег сабирка је 1 и она се постиже за свако целобројно x, па и за $x=3$. Дакле, највећа вредност функције

$$f(x)=\frac{x}{x^2+9}+\frac{1}{x^2-6x+21}+\cos 2\pi x$$

на интервалу $(0,+\infty)$ је $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+1=\frac{5}{4}$ и постиже се за $x=3$.

3. Претпоставимо да смо реалну функцију ψ увели на следећи начин

$$\psi(x)=\begin{cases} x, & x>2,\\ 2, & 1<x\leqslant 2,\\ 2x, & x\leqslant 1.\end{cases}$$

(а) Решити неједначину $\psi(x)<x$;

(б) Решити једначину $\psi(x)+\psi(1-x)+\psi(\psi(x))=2$. (**М359**)

Решење:

(а) Очигледно, скуп решења неједначине је подскуп интервала $(-\infty,1]$, па решавамо неједначину $2x<x$. Дакле, $x\in(-\infty,0)$.

(б) Одредимо прво функције $\psi(1-x)$ и $\psi(\psi(x))$. На основу дате дефиниције функције ψ добијамо

$$\psi(1-x)=\begin{cases} 1-x, & x<-1\\ 2, & -1\leqslant x<0\\ 2-2x, & x\geqslant 0\end{cases} \quad \text{и} \quad \psi(\psi(x))=\begin{cases} 4x, & x\leqslant \frac{1}{2}\\ 2, & \frac{1}{2}<x\leqslant 2\\ x, & x>2\end{cases}$$

Сада, једноставним рачуном долазимо до решења $x\in[2,+\infty)\cup\{0\}$.

4. Наћи све функције $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, такве да за произвољне реалне бројеве x и y важи једнакост $f(x-y)=f(x)+f(y)-2xy$. (**М403**)

Решење: Нека је $x=y$, тада, по услову задатка, важи једнакост

$$f(0)=f(x)+f(x)-2x^2,$$

односно $f(x)=x^2+\frac{a}{2}$, где је $a=f(0)$. Ако је $x=y=0$, добијамо да је $a=2a$, тј. $a=0$. Дакле, $f(x)=x^2$ је једини кандидат за такву функцију. Непосредна провера показује да ова функција заиста и задовољава наведени услов.

5. Постоје ли цели позитивни бројеви x,y,z за које важи:

$$x^3+y^4=z^5.$$

Решење: Видети решење истог задатка за 3. разред у А категорији (задатак **5.**).

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28.01.2006.

Четврти разред – Б категорија

1. Решити систем једначина

$$\begin{array}{rcrcrcl} \log_2 x & + & \log_4 y & + & \log_4 z & = & 2 \\ \log_3 y & + & \log_9 z & + & \log_9 x & = & 2 \\ \log_4 z & + & \log_{16} x & + & \log_{16} y & = & 2. \end{array}$$

Решење: Видети решење истог задатка за трећи разред у А категорији (задатак **1.**).

2. Нека је функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задата формулом $f(x) = 3\sin x + 4\cos x$. Одредити максималну и минималну вредност ове функције.

Решење: Видети решење истог задатка за 4. разред у А категорију (задатак **1.**).

3. Наћи вредности параметра p за које једначина $x^4 - (3p+2)x^2 + p^2 = 0$ има четири реална решења која образују аритметичку прогресију. **(М332)**

Решење: Дата једначина је биквадратна, па су њена решења симетрична у односу на координантни почетак, а како и образују аритметичку прогресију, она су облика

$$-\frac{3}{2}\,d,\ -\frac{1}{2}\,d,\ \frac{1}{2}\,d,\ \frac{3}{2}\,d.$$

Ако уведемо смену $t = x^2$ полазна једначина постаје $t^2 - (3p+2)t + p^2 = 0$, и решења ове једначине су $t_1 = \frac{1}{4}\,d^2$ и $t_2 = \frac{9}{4}\,d^2$. Сада, помоћу Виетових формула за квадратне једначине добијамо

$$\frac{1}{4}d^2 + \frac{9}{4}d^2 = 3p + 2, \quad \frac{1}{4}d^2 \cdot \frac{9}{4}d^2 = p^2,$$

односно

$$\frac{5}{2}d^2 = 3p + 2, \quad \frac{9}{16}d^4 = p^2.$$

Из претходне две једначине добијамо $9p+6 = 10|p|$, па су тражене вредности за параметар p бројеви 6 и $-\frac{6}{19}$.

4. Наћи највећу вредност функције

$$f(x)=\frac{x}{x^2+9}+\frac{1}{x^2-6x+21}+\cos 2\pi x$$

на интервалу $(0,+\infty)$. (**M375**)

Решење: Видети решење истог задатка за 4. разред у А категорији (задатак **2.**).

5. Претпоставимо да смо реалну функцију ψ увели на следећи начин

$$\psi(x)=\begin{cases} x, & x>2,\\ 2, & 1<x\leqslant 2,\\ 2x, & x\leqslant 1.\end{cases}$$

(а) Решити неједначину $\psi(x)<x$;

(б) Решити једначину $\psi(x)+\psi(1-x)+\psi(\psi(x))=2$. (**M359**)

Решење: Видети решење истог задатка за 4. разред у А категорији (задатак **3.**).