

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.03.2007.

Други разред – А категорија

1. Круг уписан у троугао ABC додирује странице BC, CA, AB редом у тачкама D, E, F . Права AD сече уписани круг троугла ABC још у тачки Q . Доказати да права EQ пролази кроз средиште дужи AF ако и само ако је $AC = BC$.

2. Нека је S скуп комплексних бројева дефинисан са:

$$S = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left| z + \frac{1}{z} \right| = 1 \right\}.$$

- (a) Наћи највећу могућу вредност модула $|z|$, ако је $z \in S$;
(b) Наћи најмању могућу вредност модула $|z|$, ако је $z \in S$.

3. Решити једначину $x^5 = y^5 + 3y^4 + 8y^2 + 5y + 1$ у целим бројевима.

4. Нека је $P(x)$ полином са целобројним коефицијентима. Ако за неке различите целе бројеве a и b важи $P(a) \cdot P(b) = -(a - b)^2$, доказати да је $P(a) + P(b) = 0$.

5. Могу ли се поља квадрата 5×5 прекрити правоугаоником 2×3 тако да свако поље квадрата буде прекривено исти број пута?

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.03.2007.

Други разред – Б категорија

1. Раван је разложена на јединичне квадрате тако да формира бесконачну шаховску таблу. Уписати у сваки квадрат по један од бројева 1, 2, 3, 4, 5 тако да у сваких пет хоризонтално, вертикално или дијагонално суседних квадрата буду уписани сви ови бројеви?
2. Нека је CD висина правоуглог троугла ABC (угао код темена C је 90°). Ако је K тачка равни тог троугла таква да је $AK = AC$, доказати да је пречник кружнице описане око троугла ABK који садржи тачку A нормалан на DK .
3. Нека је $f(x) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$ квадратна функција, где су α и β неки (не обавезно различити) природни бројеви. Колико реалних и различитих нула има једначина

$$f(f(f(x))) = 0 ?$$

4. За сваки природан број обележимо са x_n број који се добија узастопним записивањем природних бројева од 1 до n (нпр. $x_{15} = 123456789101112131415$). Одредити све природне бројеве n за које 27 дели $x_n^2 + x_n - 2$.
5. Одредити све реалне бројеве $x > 1$ за које је тачна неједнакост

$$\log_2(\log_4 x) + \log_4(\log_2 x) \leq 2.$$

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.