

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.03.2007.

Трећи разред – А категорија

1. У троуглу ABC у коме је $AB \neq AC$, уписани круг са центром S додирује странице BC, CA и AB редом у тачкама D, E и F . Права EF сече праву BC у P . Доказати да је права PS нормална на праву AD .
2. У троуглу ABC је $AB = AC < BC$. Нека је D тачка на полуправој AB , тако да је $AD = BC$. Ако је $\sphericalangle BCA = 4 \cdot \sphericalangle DCB$ одредити могуће вредности за $\sphericalangle ABC$.
3. Нека су a и n природни бројеви, $a > 1$, такви да n дели $a^n - 1$. Доказати да тада $(a - 1)n$ дели $a^n - 1$.
4. У групи људи сваки човек има тачно три познаника. Доказати да је могуће сместити све људе из те групе у две просторије тако да сваки човек има највише једног познаника у просторији у којој се налази.
5. Одредити минималну вредност израза $\frac{x^4+y^4+z^4}{x+y+z}$ уз ограничења $\min\{x(y^2+z^2), y(z^2+x^2), z(x^2+y^2)\} \geq 1+xyz$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Време за рад 240 минута.

Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.03.2007.

Трећи разред – Б категорија

1. Двочлана партиција скупа $P = \{1, 2, \dots, n\}$ је пар $\{A, B\}$ непразних подскупова од P таквих да је $P = A \cup B$ и $A \cap B = \emptyset$ (партиције $\{A, B\}$ и $\{B, A\}$ се сматрају једнаким). Доказати да је број двочланих партиција скупа P једнак $2^{n-1} - 1$.
2. Права p која је паралелна страници AB датог троугла ABC и полови страницу BC сече симетралу s угла ABC у тачки T . Ако је O центар уписаног круга датог троугла, доказати да је

$$\angle OCT = \frac{1}{2} \angle BAC.$$

3. Доказати да једначина $x + \cos x = 1$ има тачно једно решење у скупу реалних бројева.
4. Наћи бар једну неконстантну функцију $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ која задовољава услов:

$$f(x+2) + f(x) = f(x+1) \text{ за свако } x \in \mathbb{R}.$$

5. α, β, γ су оштри углови које дијагонала квадрата $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ гради редом са ивицама AA_1, AB и AD . Доказати неједнакост

$$\alpha + \beta + \gamma < \pi.$$

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.