Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.03.2007.

Четврти разред – А категорија

1. Код једнакокраког троугла ABC је $AB = BC$ и $\angle ABC = 30^\circ$. Тачка D припада страници BC троугла тако да је $AC : BD = \sqrt{2}$. Израчунати угао $\angle DAC$.

2. Ако су X, Y и Z тачке на страницама BC, CA и AB троугла ABC, такве да је $\triangle XYZ \sim \triangle ABC$ ($\sphericalangle X = \sphericalangle A$, $\sphericalangle Y = \sphericalangle B$), доказати да се ортоцентар троугла XYZ и центар описаног круга троугла ABC поклапају.

3. Доказати да постоји полином облика $x^n + 2007x^{n-1} + \cdots$ који дели полином $x^m - 1$ за неко $m \in \mathbb{N}$.

4. Нека је $n \in \mathbb{N}$ дати непаран природан број већи од 1. Доказати да се сваки природан број $l \in \mathbb{N}$, $1 \le l \le n$ може представити као збир или разлика два природна броја који су мањи од n и узајамно прости са n.

5. Колико највише ловаца може да се стави на шаховску таблу димензија $m \times n$ тако да ни један од њих не туче више од два друга ловца.

Напомена: Ловац туче фигуру која је на истој дијагонали и која није заклоњена неком другом фигуром.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.03.2007.

Четврти разред – Б категорија

1. Двочлана партиција скупа $P = \{1, 2, \ldots, n\}$ је пар $\{A, B\}$ непразних подскупова од P таквих да је $P = A \cup B$ и $A \cap B = \emptyset$ (партиције $\{A, B\}$ и $\{B, A\}$ се сматрају једнаким). Доказати да је број двочланих партиција скупа P једнак $2^{n-1} - 1$.

2. У троуглу ABC важе релације $AB = AC < BC$. Нека је D тачка на полуправој AB таква да је $AD = BC$. Одредити вредност угла $\sphericalangle ABC$ ако се зна да је $\sphericalangle BCA = 4 \cdot \sphericalangle DCB$.

3. Нека су a и b природни бројеви такви да је $a \cdot b = 10^{20}$ и зна се да a дели b^2, b^2 дели a^3, a^3 дели b^4, b^4 дели a^5 итд., $a^{2n-1} \mid b^{2n}$ и $b^{2n} \mid a^{2n+1}$ за све $n \in \mathbb{N}$. Доказати да је $a = b$.

4. Дат је полином $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ са целобројним коефицијентима. Ако је $a \cdot d$ непаран а $b \cdot c$ паран број, показати да је бар једна нула полинома $P(x)$ ирационална. Показати примером да аналогно тврђење не важи ако је $a \cdot d$ паран а $b \cdot c$ непаран број?

5. Одредити максималну вредност коју може имати површина нормалне пројекције правилног тетраедра ивице a на произвољну раван.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.