

Министарство просвете и спорта Републике Србије  
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.02.2006.

Други разред – А категорија

1. Наћи највећу вредност израза  $4x^2 + 80x + y + 43$  под условом да важи  $6x^2 + 32x + y + 283 \leq 0$  и  $x^2 + 86x + y + 202 \geq 0$ .

2. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$x^z = y^{\frac{8}{3}}, \quad y^z = x^{\frac{2}{3}}, \quad z = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{9y}.$$

3. Нека су  $\alpha, \beta, \gamma$  углови троугла. Одредити угао  $\alpha$  ако је

$$\frac{\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - \sin^2 \alpha}{\sin \beta \sin \gamma} = 1.$$

4. За које вредности реалног параметра  $\alpha$  неједнакост

$$\sin^6 x + \cos^6 x + \alpha \sin x \cos x \geq 0$$

важи за све вредности  $x$ ?

5. Подскуп  $X$  скупа  $\{1, 2, \dots, n\}$  има својство да у њему не постоје два броја чија је разлика 1 или 4. Колико највише елемената може имати скуп  $X$ ?

Време за рад 180 минута.  
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије  
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.02.2006.

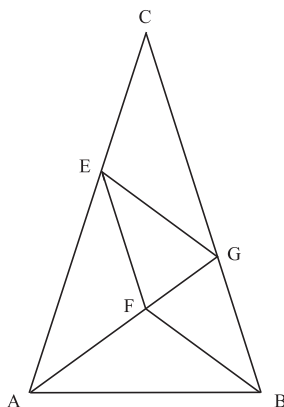
Други разред – Б категорија

1. Ако су  $a, b, c$  реални бројеви такви да је  $(b-1)^2 - 4ac < 0$ , доказати да систем једначина

$$\begin{aligned}ax^2 + bx + c &= y, \\ ay^2 + by + c &= z, \\ az^2 + bz + c &= x\end{aligned}$$

нема реалних решења.

2. Свака дијагонала конвексног петоугла одсеца троугао јединичне површине. Израчунати површину тог петоугла.
3. Троугао  $ABC$  подељен је на једнакокраке троуглове. Дужи  $AF$  и  $BF$  су краци троугла  $ABF$ ,  $BF$  и  $BG$  су краци троугла  $BFG$ ,  $AF$  и  $EF$  краци троугла  $AEF$ ,  $EF$  и  $EG$  краци троугла  $EFG$  и  $CE, GE$  краци троугла  $CEG$ . Доказати да су троуглови  $EFG$  и  $ABC$  слични и одредити коефициент сличности.



4. Доказати да је сума реципрочних вредности свих делитеља савршеног броја  $N$  једнака 2. За број  $n$  се каже да је савршен уколико је збир свих његових делитеља (укључујући 1 и  $n$ ) једнак  $2n$ .
5. Од Новог Сада до Београда постоје нови и стари пут који су повезани са 7 попречних путева. Колико има различитих начина путовања овим путевима од Новог Сада до Београда, таквих да је у сваком начину путовања сваки део пута пређен највише једанпут?

Време за рад 180 минута.  
Задатке детаљно образложити.