

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.02.2006.

Четврти разред – А категорија

1. Доказати неједнакост

$$\cos^3 x \sin x \leq \frac{3\sqrt{3}}{16}.$$

Када важи једнакост?

2. Дато је n различитих тачака A_1, A_2, \dots, A_n у равни. Нека је \mathcal{S} скуп свих средишта дужи $\overline{A_i A_j}$, $1 \leq i < j \leq n$.

а) Доказати да скуп тачака \mathcal{S} има бар $2n - 3$ елемента.

б) Наћи један распоред тачака A_1, A_2, \dots, A_n за који скуп \mathcal{S} има тачно $2n - 3$ елемента.

3. Четвороугао $ABCD$ је основа пирамиде $SABCD$, а ивица SD је њена висина. Израчунати запремину пирамиде, ако је $AB = BC = \sqrt{5}$, $AD = DC = \sqrt{2}$, $AC = 2$ и $SA + SB = 2 + \sqrt{5}$.

4. Нека је $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Наћи број различитих реалних корена једначине $f(f(x)) = 0$.

5. На колико различитих начина се могу расподелити 7 различитих куглица у 4 кутије које се не разликују?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије
ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
18.02.2006.

Четврти разред – Б категорија

1. Ако су x, y реални бројеви такви да је $1 \leq x \leq y$ онда из једнакости

$$x^y + y^x = x^x + y^y \quad \text{следи} \quad x = y.$$

Доказати.

2. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$x^z = y^{\frac{8}{3}}, \quad y^z = x^{\frac{2}{3}}, \quad z = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{9y}.$$

3. K_0 је кружница са центром у $C_0 = (0, 1/2)$ и полупречником $1/2$, K_1 кружница са центром у $C_1 = (1, 1/2)$ и полупречником $1/2$, K_2 (најмања) кружница која додирује кружнице K_0, K_1 и x -осу и K_3 кружница која на исти начин додирује кружнице K_0, K_2 и x -осу. Доказати да је за $n = 1, 2, 3$ полупречник кружнице K_n једнак $r_n = \frac{1}{2n^2}$ и да ова кружница додирује x -осу у тачки $x_n = \frac{1}{n}$.

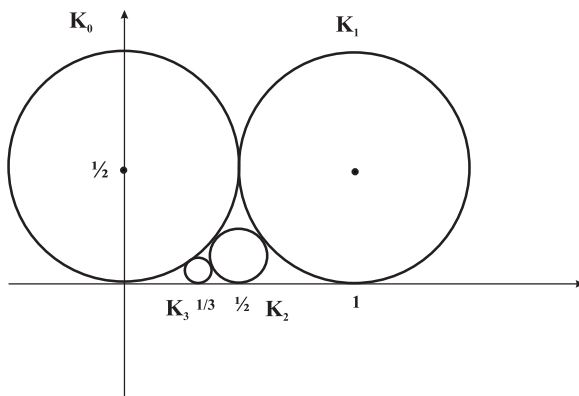


Figure 1:

4. Нека су α, β, γ углови троугла. Одредити угао α ако је

$$\frac{\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - \sin^2 \alpha}{\sin \beta \sin \gamma} = 1.$$

5. (а) Како се мења запремина тетраедра $ABCD$ ако се повећава ивица AB а све остале ивице тетраедра остају неизмењене.
(б) Дужина ивице AB тетраедра $ABCD$ је већа или једнака 1, док су остале ивице дужине мање или једнаке 1. Доказати да је

$$V_{ABCD} \leq \frac{1}{8}.$$

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.