Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.12.2004.

Трећи разред – А категорија

1. У оштроуглом троуглу $\triangle ABC$ тачка D је подножје висине из C, а тачка E подножје висине из D у $\triangle BCD$. Нека је F тачка дужи DE таква да је $DF : FE = BD : DA$. Доказати да су праве CF и AE узајамно нормалне.

2. У скупу реалних бројева решити једначину
$$x^{\log_2 3} + 3^{\log_2 \sqrt{x}} = 12.$$

3. Колико решења у скупу ненегативних целих бројева има једначина
$$\left[\frac{100n}{199}\right] + \left[\frac{100n}{201}\right] = n?$$

4. Нека су a, b и c комплексни бројеви такви да су сва три корена једначине $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ модула 1. Доказати да су сва три корена једначине $x^3 + |a|x^2 + |b|x + |c| = 0$, такође, модула 1.

5. После сваког састанка комисије, неки чланови (значи њих бар двоје) одлазе заједно на ручак. Тамо међутим, свако од присутних се посвађа са сваким. Након тога посвађани неће више отићи у заједничком друштву на ручак после састанка комисије. Састанци комисије се одржавају докле год је могуће оформити друштво (од бар двоје људи) за одлазак на ручак након састанка.
а) Да ли је могуће да је комисија која броји 8 чланова одржала укупно 15 састанака (тј. ручкова)?
б) Да ли је могуће да је комисија која броји 13 чланова одржала укупно 7 састанака (тј. ручкова)?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.12.2004.

Трећи разред – Б категорија

1. Нека су α, β и γ углови такви да важи $\beta = 60^\circ + \alpha$ и $\gamma = 60^\circ + \beta$. Доказати да је вредност израза

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha$$

цео број.

2. У скупу реалних бројева решити једначину

$$x^{\log_2 3} + 3^{\log_2 \sqrt{x}} = 12.$$

3. Наћи све целе бројеве x и y за које важи

$$x^2 + 8xy + 25y^2 = 225.$$

4. Дат је паралелограм $ABCD$ са оштрим углом од 60°. Одредити однос дужина страница паралелограма $AB : AD$, ако је однос дужина дијагонала $AC : BD = \sqrt{19} : \sqrt{7}$.

5. У правилној тространој пирамиди, чија је ивица основе a, угао између ивица при врху једнак је α ($\alpha \leqslant 90^\circ$). Одредити површину пресека пирамиде и једне равни која садржи једну ивицу основе и нормална је на наспрамну бочну ивицу.

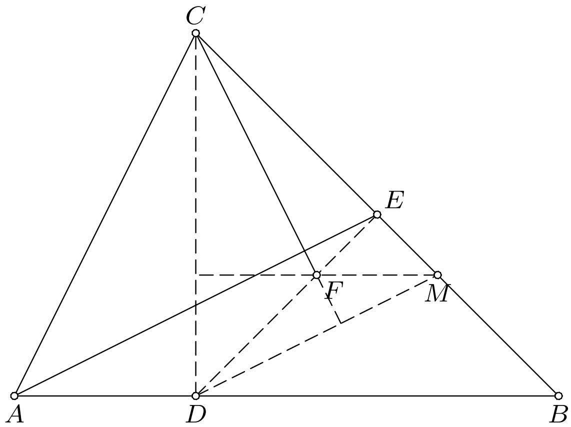
Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Трећи разред – А категорија

1. Нека је M тачка странице BC таква да је $DM \parallel AE$. Тада је $EM : MB = AD : DB = EF : FD$, па је $MF \parallel AB$, а онда и $MF \perp CD$. Како је и $DE \perp BC$, добијамо да је тачка F ортоцентар троугла $\triangle CDM$, па је $CF \perp DM$, а тиме и $CF \perp AE$.



2. За $x > 0$ су сви логаритми и степени дефинисани. Како је $3^{\log_2 \sqrt{x}} = 3^{\frac{1}{2}\log_2 x} = \sqrt{3^{\log_2 x}}$ и $x^{\log_2 3} = 3^{\log_2 x}$, то је дата једначина еквивалентна једначини $t^2+t-12 = 0$ (смена $t = \sqrt{3^{\log_2 x}}$), чија су решења $t_1 = -4 < 0$ и $t_2 = 3$. Због $t > 0$ имамо $\sqrt{3^{\log_2 x}} = 3$, па је $\log_2 x = 2$, тј. $x = 4$.

3. Нека су a и b редом остаци при дељењу $100n$ са 199 и 201. Задата једначина постаје $\frac{100n-a}{199} + \frac{100n-b}{201} = a$, што се након свођења на заједнички именилац своди на $n = 201a + 199b$.

С друге стране, за све $a = 0, 1, \ldots, 198$ и $b = 0, 1, \ldots, 200$, $n = 201a + 199b$ је решење једначине. Заиста, остаци при дељењу $100n = 20100a + 19900b$ са 199 и 201 су редом a и b, па сад лако проверавамо да је $\left[\frac{100n}{199}\right] + \left[\frac{100n}{201}\right] = n$. Како се за различите вредности бројева a и b добијају различите вредности за n, решења има онолико колико има парова (a, b), а ових има тачно $199 \cdot 201 = 39999$.

4. Нека су z_1, z_2 и z_3 корени једначине $x^3+ax^2+bx+c=0$, а w_1, w_2 и w_3 корени једначине $x^3+|a|x^2+|b|x+|c|=0$. Тада, користећи Виетове формуле, налазимо да важи

$$\begin{aligned}|a| &= |-a| = |z_1+z_2+z_3| \leqslant |z_1|+|z_2|+|z_3| = 3,\\ |b| &= |z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1| = |z_1z_2z_3|\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right|\\ &= |\bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3| = |\overline{z_1+z_2+z_3}| = |z_1+z_2+z_3| = |a|,\end{aligned}$$

као и $|z_1z_2z_3| = |-c| = |c| = 1$. Са друге стране, применом Виетових формула на другу једначину и чињеница $|a|=|b|$ и $|c|=1$, добијамо да је $w_1=-1$ решење исте. Дакле, друга једначина је еквивалентна једначини

$$x^3+|a|x^2+|a|x+1 = (x+1)(x^2+(|a|-1)x+1) = 0,$$

па су w_2 и w_3 корени квадратне једначине $x^2+(|a|-1)x+1=0$ (из Виетових формула имамо да је $w_2w_3=1$ – требаће нам касније). Међутим, како је $0\leqslant|a|\leqslant 3$, то за дискриминанту ове једначине важи $D=(|a|+1)(|a|-3)\leqslant 0$. Ако је $|a|=3$ тада је $w_2=w_3=-1$, односно $|w_1|=|w_2|=|w_3|=1$. За $0\leqslant|a|<3$ је $D<0$ па имамо два конјуговано комплексна корена, $w_3=\overline{w_2}$, и за њих важи $|w_2|^2=w_2\overline{w_2}=w_2w_3=1$, као и $|w_3|^2=w_3\overline{w_3}=w_3w_2=1$.
Тиме смо показали да је у сваком случају $|w_1|=|w_2|=|w_3|=1$.

5. **а)** Може. Није тешко конструисати пример.Означимо бројевима 1-8 чланове. Укупно има $\binom{8}{2} = 28$ парова, па ће ручкова бити максимално ако стално иду по два члана. Ако иду три члана ту се већ изгубе 2 будућа ручка, ако иду четири губи се 5 ручкова, са пет чланова губи се 9 итд. Ми треба да изгубимо 13 ручкова. То можемо нпр ако иду $\{1,2,3,4,5\},\{5,6,7\},\{1,6,8\}$, а осталих 12 ручкова сви по 2 члана који још парови фале.
б) Не може. Наиме, парова има укупно $\binom{13}{2} = 78$. Претпоставимо да је могуће. Требало би да за сваки пар особа постоји тачно један ручак на коме су биле заједно. На ручку за k особа "потроши" се $\binom{k}{2}$ парова. Како је $\binom{5}{2} = 10$, а $7\cdot 10 < 78$, јасно је да од тих 7 ручкова бар на једном од њих је морало бити присутно 6 или више особа (у супротном би остао неки пар чланова који није никад био заједно на ручку, тј. и након тих 7 ручкова било би могуће организовати још неки). Такође, немогуће је да су преосталих 6 ручкова сви двочлани јер би опет остао неки пар који није био на ручку заједно (јер очигледно највише $\binom{12}{2}+6 < 78$ различитих парова чланова је било заједно на ручку). Значи имамо бар један ручак са 6 и више особа, и један са 3 и више. Но та два ручка имају највише 1 заједничког члана. Онда значи имамо бар 5 особа са првог ручка које још нису ручале са бар 2 особе са другог ручка. За то је потребно је организовати бар још $5\cdot 2 = 10$ ручкова да би свако од њих ручао са сваким. Контрадикција.

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

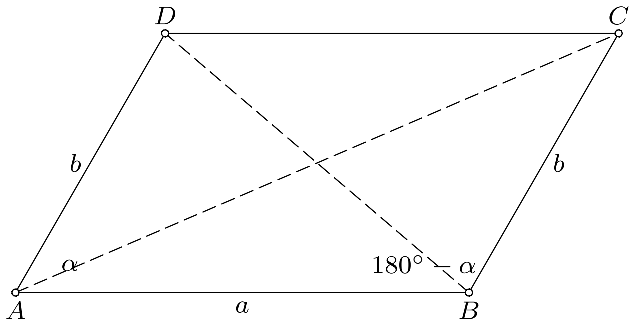
Трећи разред – Б категорија

1. Нека је $\operatorname{tg}\alpha = a$. Тада је $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha+60^\circ) = \dfrac{a+\sqrt{3}}{1-a\sqrt{3}}$ и $\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(\alpha+120^\circ) = \dfrac{a-\sqrt{3}}{1+a\sqrt{3}}$. Сада имамо $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a^2+a\sqrt{3}}{1-a\sqrt{3}}+\dfrac{a^2-3}{1-3a^2}+\dfrac{a^2-a\sqrt{3}}{1+a\sqrt{3}} = \dfrac{9a^2-3}{1-3a^2} = -3$.

2. За $x>0$ су сви логаритми и степени дефинисани. Како је $3^{\log_2\sqrt{x}} = 3^{\frac{1}{2}\log_2 x} = \sqrt{3^{\log_2 x}}$ и $x^{\log_2 3} = 3^{\log_2 x}$, то је дата једначина еквивалентна једначини $t^2+t-12=0$ (смена $t=\sqrt{3^{\log_2 x}}$), чија су решења $t_1=-4<0$ и $t_2=3$. Због $t>0$ имамо $\sqrt{3^{\log_2 x}}=3$, па је $\log_2 x = 2$, тј. $x=4$.

3. Решавањем полазне једначине по x налазимо $x=-4y\pm 3\sqrt{25-y^2}$, па је $|y|\leqslant 5$ и $\sqrt{25-y^2}$ треба да буде цео број. Дакле, имамо да је $y\in\{0,\pm3,\pm4,\pm5\}$. Решења су:
$(x,y)\in\{(15,0),(-15,0),(24,-3),(0,-3),(-24,3),(0,3),(25,-4),$
$(17,-4),(-25,4),(-17,4),(20,-5),(-20,5)\}$.

4. Означимо $AB=CD=a$, $AD=BC=b$, $BD=d_1=\sqrt{7}\cdot k$, $AC=d_2=\sqrt{19}\cdot k$, $\sphericalangle BAD=\alpha$ (за који треба да видимо да ли је 60° или 120°), $\sphericalangle ABC = 180^\circ-\alpha$. Применимо косинусну теорему на троуглове $\triangle ABD$ и $\triangle ABC$: ${d_1}^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha$, ${d_2}^2=a^2+b^2-2ab\cos(180^\circ-\alpha)$, па како је $d_1<d_2$ добијамо да је $\alpha=60^\circ$. Дакле, ${d_1}^2=a^2+b^2-ab$, ${d_2}^2=a^2+b^2+ab$, па је $\dfrac{{d_2}^2}{{d_1}^2}=\dfrac{a^2+b^2+ab}{a^2+b^2-ab}=\dfrac{19}{7}$, тј. $\dfrac{\left(\frac{a}{b}\right)^2+1+\frac{a}{b}}{\left(\frac{a}{b}\right)+1-\frac{a}{b}}=\dfrac{19}{7}$, одакле налазимо квадратну једначину $\frac{12}{7}\left(\frac{a}{b}\right)^2-\frac{26}{7}\left(\frac{a}{b}\right)+\frac{12}{7}=0$. Кад је решимо добијамо да је $\frac{a}{b}=\frac{3}{2}$ или $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$.



5. Означимо са A, B, C темена основе и са S врх пирамиде. Нека је D средиште ивице BC ($BD = \frac{1}{2}a$) и нека је E пресек равни која садржи BC и нормална је на AS. Тада је $BE \perp AS$, па из правоуглог троугла $\triangle BES$ имамо $BE = a\cos\frac{\alpha}{2}$. Висину DE добијамо из Питагорине теореме за $\triangle BDE$: $DE = \sqrt{BE^2 - BD^2} = a\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}}$. Стога је $P_{\triangle BCE} = \dfrac{BC \cdot DE}{2} = \dfrac{a^2}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}}$.