

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

19.03.2005.

Први разред – А категорија

1. Колико има једнакокраких трапеза са целобројним страницама чији је обим 2004?
(Трапез је четвороугао који има тачно две паралелне странице!)
2. Нека је $\triangle ABC$ једнакокраки троугао са $AB = AC$. Дата је тачка D на страници AC , таква да је $CD = 2AD$ и тачка P на дужи BD . Ако је $\sphericalangle APC = 90^\circ$, доказати да је $\sphericalangle ABP = \sphericalangle PCB$.
3. Нека су A_1, A_2, \dots, A_{501} произвољне, међусобно различите тачке у равни. Доказати да на било којој кружници полупречника 4 постоји тачка M за коју је испуњено да је збир дужина дужи $MA_1, MA_2, \dots, MA_{501}$ већи или једнак 2004.
4. За реалне бројеве a и b доказати следећу неједнакост:

$$a(1 + b^2) + b(1 + a^2) \leq (1 + a^2)(1 + b^2).$$

5. На табли је написано 2005 јединица. Дозвољено нам је да избришемо два од записаних бројева и уместо њих напишемо четвртину њихове суме. Овај поступак понављамо док на табли не остане само један број. Доказати да последњи преостали број није мањи од $1/2005$.

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

19.03.2005.

Први разред – Б категорија

1. Колико има једнакокраких трапеза са целобројним страницама чији је обим 2004?
(Траpez је четвороугао који има тачно две паралелне странице!)
2. Нека су A_1, B_1, C_1 редом пресечне тачке симетрала унутрашњих углова из темена A, B, C троугла $\triangle ABC$ са описаним кругом око троугла $\triangle ABC$. Доказати да је центар уписаног круга троугла $\triangle ABC$ ортоцентар троугла $\triangle A_1B_1C_1$.

3. Нека су a, b и c различити цели бројеви. Показати да је и

$$m = \frac{a^3(b^2 - c^2) + b^3(c^2 - a^2) + c^3(a^2 - b^2)}{a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)}$$

такође цео.

4. Доказати да се број

$$\underbrace{11\dots11}_{2005} \underbrace{22\dots22}_{2005}$$

може написати као производ два узастопна природна броја.

5. Квадрат 2×2 подељен је на 4 квадратића 1×1 . Сваки од квадратића је обојен црвеном, плавом или белом бојом.
 - а) Колико има различитих бојења?
 - б) Колико има различитих бојења у којима се све три боје појављују?

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.