

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

19.03.2005.

Други разред – А категорија

1. Нека су a, b, c природни бројеви такви да је

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}.$$

Ако је d највећи заједнички делилац бројева a, b, c , доказати да је $abcd$ потпун квадрат.

2. Нека је H ортоцентар оштроуглог троугла $\triangle ABC$. На дужи-ма BH и CH одређене су тачке B_1 и C_1 такве да је $\sphericalangle AB_1C = \sphericalangle AC_1B = 90^\circ$. Доказати да је $AB_1 = AC_1$.

3. Нека је P тачка унутар оштроуглог троугла $\triangle ABC$, $AC < BC$, таква да је $\sphericalangle PAC = \sphericalangle PBC$. Права CP сече AB у тачки D . Доказати да је $\frac{AD}{DB} < \frac{AC^2}{CB^2}$.

4. Дата су 2 квадратна полинома са реалним коефицијентима,

$$P_1(x) = x^2 + a_1x + b_1 \quad \text{и} \quad P_2(x) = x^2 + a_2x + b_2,$$

при чему важи:

$$(b_1 - b_2)^2 + (a_1 - a_2)(a_1b_2 - a_2b_1) < 0.$$

Доказати да тада оба полинома имају реалне корене и да се између два корена сваког од тих полинома налази корен оног другог.

5. Колико има пермутација π скупа $\{1, 2, \dots, n\}$ таквих да је производ $(\pi_1 - 1)(\pi_2 - 2) \dots (\pi_n - n)$ непаран број?

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије
РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
19.03.2005.

Други разред – Б категорија

1. Доказати да је број

$$\frac{1 \underbrace{000 \dots 00}_1}{2^{2004} + 2^{1000} - 1}$$

сложен.

2. Нека је H ортоцентар оштроуглог троугла $\triangle ABC$. На дужима BH и CH одређене су тачке B_1 и C_1 такве да је

$$\sphericalangle AB_1C = \sphericalangle AC_1B = 90^\circ.$$

Доказати да је $AB_1 = AC_1$.

3. Реални бројеви x и y задовољавају систем једнакости

$$\begin{aligned}x + y + \frac{x}{y} &= 10 \\ \frac{x(x+y)}{y} &= 20.\end{aligned}$$

Пронађите суму свих могућих вредности израза $x + y$.

4. Решити неједначину

$$\sqrt{4x - x^2 - 3} \geq \sqrt{x^2 - 7x + 12} - \sqrt{x^2 - 5x + 6}.$$

5. Доказати да за све природне бројеве n важи

$$\sqrt[3]{n+1} + \sqrt[3]{n-1} < 2\sqrt[3]{n}.$$

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.