

Министарство просвете и спорта Републике Србије  
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

19.03.2005.

Четврти разред – А категорија

1. Нека су  $a, b \in \mathbb{Z}$  и за свако  $n \in \mathbb{N}$  број  $a \cdot 2^n + b$  је потпун квадрат. Доказати да је  $a = 0$ .
2. У круг  $k$  је уписан шестоугао  $ABCDEF$ , при чему су странице  $AB$ ,  $CD$  и  $EF$  једнаке полупречнику круга  $k$ . Доказати да средишта преостале три странице представљају врхове једнакостраничног троугла.
3. Ако су  $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$  сви делиоци природног броја  $n > 1$ , доказати да је

$$d_1 + d_2 + \dots + d_k > k\sqrt{n}.$$

4. Низ  $\{a_i\}$  задат је рекурентно:

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2 + 2}{a_n}, \quad \text{за } n \geq 1.$$

Доказати да су сви чланови тог низа цели бројеви.

5. Дат је јединични круг и у њему 800 тачака, од којих ниједна није центар круга. Познато је да се међу датим тачкама не налазе 3 колинеарне. Доказати да мала Ангелина може наћи кружни исечак од  $45^\circ$  који садржи тачно 100 тачака. Мала Ангелина не сме да сече круг по правима које садрже неку од датих тачака.

Време за рад 240 минута.  
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије  
Друштво математичара Србије  
РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ  
19.03.2005.

Четврти разред – Б категорија

1. Решити неједначину  $\sqrt{5 - 2 \sin \frac{x}{6}} \geq 6 \sin \frac{x}{6} - 1$ .

2. Доказати да је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \right) = 0.$$

3. Ако су  $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$  сви делиоци природног броја  $n > 1$ , доказати да је

$$d_1 + d_2 + \dots + d_k > k\sqrt{n}.$$

4. Доказати неједнакост:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

5. Израчунати површину правилне четворостране призме запремине  $V = \sqrt{3}$  код које је збир дужина свих ивица најмањи.

Време за рад 240 минута.  
Задатке детаљно образложити.