

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

17.01.2004.

Други разред – А категорија

1. На дијагонали AC ромба $ABCD$ изабрана је произвољна тачка E различита од A и C . Нека су N и M тачке правих AB и BC , редом, такве да је $AE = NE$ и $CE = ME$, а K пресечна тачка правих AM и CN . Доказати да тачке K, E и D припадају једној правој.
2. Наћи све бројеве $b \in \mathbb{N}$ за које постоји $a \in \mathbb{N}$ тако да
$$b \mid a^2 + 1 \text{ и } b \mid a^3 - 1.$$
3. Нека су x, y и z ненегативни реални бројеви који задовољавају $x + y + z = 1$. Наћи најмању могућу вредност израза $x + y^2 + z^2$.
4. Решити једначину $\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{17-x} = 3$.
5. Комарац се налази у доњем левом углу правоугаоне таблице формата 2003×2004 . Комарац лети изнад ове таблице на следећи начин: када полети из неког поља и прелети 99 поља, он слети на 100-то да се одмори (линија којом се комарац креће не мора да буде права линија, може бити и изломљена и сме да сече саму себе, али сваки "корак" комарца мора бити паралелан ивицама таблице). Затим комарац поново полеће са тог поља, прелеће преко 99 поља и слеће на 100-то... Да ли комарац може слетети у горњи десни угао?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

17.01.2004.

Други разред – Б категорија

1. У правоуглом троуглу $\triangle ABC$ ($\sphericalangle ACB = 90^\circ$) конструисана је висина CD . Симетрала угла $\sphericalangle CAB$ сече праву CD у тачки P , а симетрала угла $\sphericalangle BCD$ сече праву BD у тачки Q . Доказати да је $PQ \parallel BC$.
2. Испитати да ли квадратна једначина
$$(a^2 + b^2 + c^2)x^2 + 2(a + b + c)x + 3 = 0,$$
где су $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, може имати реалне и различите корене.
3. Решити једначину $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} - |3x - 2| - 3x = 1$.
4. Дата је једначина $(a - 1)x^2 - (a + 1)x + 2a - 1 = 0$, при чему је $a \neq 1$. Наћи све вредности параметра b за које израз
$$(x_1 - b)(x_2 - b)$$
не зависи од a , при чему су x_1 и x_2 корени дате једначине.
5. Доказати да је број $2^{12} + 5^9$ сложен.

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.