

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

17.01.2004.

Трећи разред – А категорија

1. Јединични квадрат је подељен на правоугле троуглове. (Троуглови немају заједничких унутрашњих тачака.) Нека је S збир хипотенуза свих тих троуглова. Доказати да је $S \geq 2\sqrt{2}$. Када важи једнакост?

2. а) Ако је $x \equiv y \pmod{p}$ онда је и $x^p \equiv y^p \pmod{p^2}$. Доказати.
б) Решити једначину $x^5 + y^5 + z^5 = 2004$ у \mathbb{N} .

3. Једначина

$$x^3 + px + q = 0$$

има комплексан корен $a + bi$, где су $a, b, p, q \in \mathbb{R}$ и $q, b \neq 0$. Показати да је $aq > 0$.

4. Доказати да је број

$$n^{2003} + n + 1$$

сложен за сваки природан број n , $n > 1$.

5. Доказати да не постоји троугао коме за углове важи:

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma.$$

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

17.01.2004.

Трећи разред – Б категорија

1. Израчунати вредност израза
 $\sin 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ$
без примене калкулатора и таблица.
2. Доказати неједнакост $(\log_{2003} 2004)^{-1} + (\log_{2005} 2004)^{-1} < 2$.
3. Равни α и β секу се по правој c . Нека је φ угао диедра кога чине те две равни, а ψ угао између неке праве p равни α и праве c . Ако је γ угао између праве p и равни β , доказати да важи
 $\sin \gamma = \sin \varphi \sin \psi$.
4. Израчунати вредност детерминанте
$$\begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & \sin(\alpha + \delta) \\ \sin \beta & \cos \beta & \sin(\beta + \delta) \\ \sin \gamma & \cos \gamma & \sin(\gamma + \delta) \end{vmatrix}.$$
5. Решити систем једначина у скупу реалних бројева:
$$\begin{aligned} x^3 y^3 z^4 &= 1 \\ x^2 y^4 z^4 &= 2 \\ x^2 y^3 z^5 &= 3 \end{aligned}.$$

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.