Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28.02.2004.

Први разред – А категорија

1. У троуглу $\triangle ABC$, дужине страница су три узастопна природна броја. Ако је тежишна линија повучена из A нормална на симетралу угла $\sphericalangle ABC$, пронаћи дужине страница троугла.

2. Нека је H ортоцентар оштроуглог троугла $\triangle ABC$. Нека су A_1, B_1 и C_1, редом, центри описаних кругова троуглова $\triangle BHC$, $\triangle CHA$ и $\triangle AHB$. Доказати да су троуглови $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ подударни.

3. Посматрајмо коначан низ од 2003 броја, при чему је $a_n = \left[\dfrac{n^2}{2004}\right]$, $n = 1, 2, \ldots, 2003$. Колико различитих чланова садржи тај низ?

4. Да ли постоји полином са целобројним коефицијентима такав да важи: **а)** $P(7) = 8$ и $P(15) = 12$; **б)** $P(8) = 7$ и $P(12) = 15$?

5. Трговац преко реке мора да превезе: сир, миша, пацова, мачку, пса, вука и медведа. У чамцу има места за само k од тих 7 објеката. Ако остави миша са сиром, миш ће га појести. Ако остави пацова са мишем или сиром пацов ће их појести. Ако остави мачку са пацовом или мишем она ће их појести. Ако остави пса са пацовом или мачком он ће их убити. Ако остави вука са псом или мачком он ће их убити. Ако остави медведа са псом или вуком он ће их убити. Претпоставља се да трговац све ове догађаје спречава да се десе кад је присутан. Које минимално k гарантује да он може све артикле безбедно да пребаци на другу страну реке?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28.02.2004.

Први разред – Б категорија

1. Доказати да је $n^n - n$ дељиво са 24 за све непарне природне бројеве n.

2. Нека је S пресек, међусобно управних, дијагонала AC и BD конвексног и тетивног четвороугла $ABCD$. Доказати да нормала из тачке S на праву BC полови дуж AD.

3. У троуглу $\triangle ABC$ за унутрашње углове важи $\alpha - \beta = 2\gamma$.
а) Доказати да је угао α туп.
б) На правој AB, иза тачке A у односу на тачку B, је дата тачка E таква да је $EC = AC$. Доказати да је CA симетрала угла $\sphericalangle ECB$.

4. Нека је дато пресликавање $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, тако да за све $x \in \mathbb{R}$ важи $f(x) + 2f(1-x) = x$. Одредити $f(x)$.

5. У једној групи људи се налазе три Италијана, четири Француза и пет Шпанаца. На колико различитих начина се сви ови људи могу поређати у низ тако да сви Французи буду један поред другог, сви Шпанци један поред другог и никоја два Италијана не буду један до другог?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.