

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28.02.2004.

Други разред – А категорија

1. Нека су m и n природни бројеви не мањи од 2. Доказати да постоји природан број k тако да важи
$$\left(\frac{n + \sqrt{n^2 - 4}}{2}\right)^m = \frac{k + \sqrt{k^2 - 4}}{2}.$$
2. Дат је троугао $\triangle ABC$. Тангента t у тачки B на описану кружницу око тог троугла сече праву AC у тачки M . Наћи $\frac{AM}{MC}$, ако је $\frac{AB}{BC} = k$.
3. Ако је $(x + \sqrt{x^2 + 1}) \cdot (y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1$, доказати да је $x + y = 0$.
4. Ако су тежишне линије $\triangle ABC$ из темена B и C међусобно нормалне онда је: $\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma \geq \frac{2}{3}$. Доказати. У ком случају важи једнакост?
5. Дата је бела табла 2002×2003 и доста црвене и беле боје.
 - а) Дозвољено је у једном кораку променити боју ма која четири поља која чине квадрат 2×2 . Да ли се после неколико корака може добити исти број белих и црвених поља?
 - б) Дозвољено је у једном кораку променити боју ма којих девет поља која чине квадрат 3×3 . Да ли се после неколико корака може добити исти број белих и црвених поља?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28.02.2004.

Други разред – Б категорија

1. Дијагонале тетивног четвороугла $ABCD$ секу се у тачки O . Ако је $BC = CD = 12\text{cm}$ и $OC = 4\text{cm}$, наћи дужину дијагонале AC .
2. Доказати да разлика решења једначине
$$5x^2 - 2(5a + 3)x + 5a^2 + 6a + 1 = 0, \quad a \in \mathbb{R}$$
не зависи од a .
3. Доказати да за свако $x \geq 0$ важи неједнакост
$$\sqrt{x}(x + 1) + x(x - 4) + 1 \geq 0.$$
4. Наћи реални и имагинарни део комплексног броја
$$z = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^{2004} + \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^{2004}.$$
5. За које вредности реалних бројева x и y израз
$$E = 2x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 2y + 2$$
има најмању вредност?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.