

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28.02.2004.

Четврти разред – А категорија

1. Нека је $ABCD$ правоугаоник. Нека је E подножје висине из A на BD . Нека је F произвољна тачка на дијагонали BD између D и E . Нека је G пресек праве CF и нормале из B на AF . Нека је H пресек праве BC и нормале из G на BD . Доказати да је $\sphericalangle EGB = \sphericalangle EHB$.
2. Дата је $n \times n$ квадратна таблица $[a_{ij}]$, где је $a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$. Одаберимо n бројева из таблице, тако да нису одабрана два броја из исте врсте или два броја из исте колоне. Доказати да збир тих n бројева не може бити мањи од 1.
3. Одредити услов који треба да задовоље реални бројеви a и b тако да систем
$$\begin{aligned}x + y + z &= a \\ x^2 + y^2 + z^2 &= b^2\end{aligned}$$
има јединствено реално решење. У којим случајевима систем нема решења?
4. Дате су две шаховске табле 2×4 и у доњем левом углу прве налази се краљ, а у доњем левом углу друге топ. Означимо са k_n број различитих n -потеза краљем, а са t_n број различитих n -потеза топом. За које n важи $k_n < t_n$?
5. Дат је правоугли троугао T . Да ли је могуће извршити разбијање троугла T на 2004 троуглића који испуњавају следеће услове:
1° сваки од тих троуглића је сличан троуглу T ;
2° не постоје два троуглића који су подударни?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28.02.2004.

Четврти разред – Б категорија

1. Наћи висину купе максималне површине омотача уписане у лопту полупречника R .
2. Дат је комплексан број $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$, $\varphi \in \mathbb{R}, \varphi \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
Одредити модул и аргумент комплексног броја $\frac{z+1}{z-1}$.
3. Наћи област вредности функције $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$.
4. Доказати да се ни за један природан број n збир $1 + 2 + \dots + n$ не може завршавати неком од цифара 2,4,7,9.
5. Колико највише оштрих углова може имати конвексан мно-
гоугао?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.