

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

27.03.2004.

Други разред – А категорија

1. Дат је троугао $\triangle ABC$. Права симетрична тежишној дужи из A у односу на симетралу угла $\sphericalangle BAC$ сече описани круг троугла $\triangle ABC$ у K . Нека је L средиште дужи AK . Доказати:
 $\sphericalangle BLC = 2\sphericalangle BAC$.

2. Наћи максималну вредност израза

$$I = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$$

ако су $a \geq b \geq c \geq d \geq e \geq 0$ реални бројеви за које важи $a + b \leq 5$ и $c + d + e \leq 5$. Када се постиже та вредност?

3. Нека је a природан број већи од 1. Доказати да је број
 $n(2n + 1)(3n + 1) \dots (an + 1)$
дељив свим простим бројевима мањим од a , за сваки природан број n .
4. Разлика корена квадратне једначине $x^2 + px + q = 0$ ($p, q \in \mathbb{R}$) једнака је 4. Наћи те корене тако да збир $p + q$ буде најмањи могући.
5. Постоји ли бесконачан подскуп скупа природних бројева такав да ниједан његов члан, нити збир неколико његових елемената није степен природног броја (тј. није број облика a^k , $a, k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$)?

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије
РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
27.03.2004.

Други разред – Б категорија

1. Наћи сва реална решења једначине
$$(x^3 - 9x^2 - x + 9)^2 + (x^3 + 3x^2 - x - 3)^4 = 0.$$
2. Нека је AB пречник круга k и тетиве AD и BC тог круга се секу у тачки E . Доказати да
$$AE \cdot AD + BE \cdot BC$$
не зависи од избора тачака C и D .
3. Наћи све природне бројеве x и y тако да важи $x + y^2 + \sqrt{x - y^2 - 1} \leq 1$.
4. Разлика корена квадратне једначине $x^2 + px + q = 0$ ($p, q \in \mathbb{R}$) једнака је 4. Наћи те корене тако да збир $p + q$ буде најмањи могући.
5. Наћи све целе бројеве m такве да важи $(1 + i)^m = (1 - i)^m$.

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.