

44. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Шабац, 17.04.2004.

Први разред

1. Наћи све парове природних бројева (a, b) за које важи:

$$5a^b - b = 2004.$$

2. Дат је троугао $\triangle ABC$ и тачке D и E редом на полуправама CB и CA , тако да важи $CD = CE = \frac{AC + BC}{2}$. Нека је H ортоцентар троугла ABC и P средиште лука AB кружнице описане око троугла ABC , који не садржи тачку C . Доказати да права DE полови дуж HP .

3. Ако су a, b, c позитивни бројеви, такви да је $abc = 1$, доказати да је

$$\frac{1}{\sqrt{b + \frac{1}{a} + \frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{c + \frac{1}{b} + \frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{a + \frac{1}{c} + \frac{1}{2}}} \geq \sqrt{2}.$$

4. У простору је дат скуп S од 100 тачака, тако да никоје 4 од њих не припадају једној равни. Доказати да не постоји више од $4 \cdot 101^2$ тетраедара са теменима из скупа S , таквих да свака два од тих тетраедара имају највише два заједничка темена.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Решења детаљно образложити.