

44. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Шабац, 17.04.2004.

Трећи и четврти разред

1. У троуглу $\triangle ABC$ површине S тачка H је ортоцентар, D , E и F су подножја висина из A , B и C , а P , Q и R тачке симетричне тачкама A , B и C у односу на праве BC , CA и AB , редом. Познато је да троуглови DEF и PQR имају једнаку површину T и да је $T > \frac{3}{5}S$. Доказати да је $T = S$.

2. Низ (a_n) одређен је условима $a_1 = 0$ и

$$(n+1)^3 a_{n+1} = 2n^2(2n+1)a_n + 2(3n+1) \quad \text{за } n \geq 1.$$

Доказати да бесконачно много чланова низа припада скупу природних бројева.

3. Нека је $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$. Колико има подскупова B скупа A , таквих да за свако $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ важи: ако $n \in B$ и $n+2 \in B$, онда бар један од бројева $n+1$ и $n+3$ такође припада скупу B ?
4. Нека је (a_n) низ одређен условима $a_1 = x \in \mathbb{R}$ и $3a_{n+1} = a_n + 1$ за $n \geq 1$. Нека је

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n - \frac{1}{6} \right], \quad B = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n + \frac{1}{6} \right].$$

Израчунати збир $A + B$ у зависности од x .

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Решења детаљно образложити.