

Министарство просвете и спорта Републике Србије  
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.01.2003.

Други разред – А категорија

1. Базен се пуни двама цевима за 6 сати. Прва цев би га напунила за 5 сати мање од друге. За које време би базен напунила друга цев?

2. У скупу целих бројева решити једначину

$$x^2 + y^2 = 3(u^2 + v^2).$$

3. Нека су  $a$  и  $b$  реални бројеви такви да је  $(\forall x \in \mathbb{R}) a \cos x + b \cos 3x \leq 1$ . Доказати да је тада  $|b| \leq 1$ .

4. Нека је дат правоугли троугао  $ABC$  са правим углом код темена  $C$  ( $\sphericalangle BCSA = 90^\circ$ ) и нека симетрала правоугла сече хипотенузу у тачки  $D$ . Нека су тачке  $K$  и  $E$  подножја нормала из тачке  $D$  на странице  $BC$  и  $AC$ , редом. Доказати да је

$$AD^2 + BD^2 = (AE + BK)^2.$$

5. На катетама једнакокрако-правоуглог троугла  $ABC$  ( $\sphericalangle BCSA = 90^\circ$ ), изабране су тачке  $D \in AC$  и  $E \in BC$ , такве да је  $CD = CE$ . Нека су  $K$  и  $L$  тачке са дужи  $AB$ , такве да је  $DK \perp AE$  и  $CL \perp AE$ . Доказати да је  $KL = LB$ .

Време за рад 180 минута.  
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије  
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.01.2003.

Други разред – Б категорија

1. Базен се пуни двама цевима за 6 сати. Прва цев би га напунила за 5 сати мање од друге. За које време би базен напунила друга цев?
2. Решити једначину:  $(x - 3)^4 + (x - 4)^4 = (2x - 7)^4$ , у скупу комплексних бројева.
3. Нека су  $a, b, c$  позитивни бројеви, такви да важи  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . Доказати да је  $a(b + c) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ .
4. Нека је дат правоугли троугао  $ABC$  са правим углом код темена  $C$  ( $\sphericalangle BCSA = 90^\circ$ ) и нека симетрала правог угла сече хипотенузу у тачки  $D$ . Нека су тачке  $K$  и  $E$  подножја нормала из тачке  $D$  на странице  $BC$  и  $AC$ , редом. Доказати да је
$$AD^2 + BD^2 = (AE + BK)^2.$$
5. Наћи све природне бројеве  $n$ , такве да је број  $z = \left(\frac{3+i}{2-i}\right)^n$  реалан.

Време за рад 180 минута.  
Задатке детаљно образложити.