

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.01.2003.

Четврти разред – А категорија

1. Доказати да за позитивне реалне бројеве a , b и c важи неједнакост

$$(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \leq abc.$$

2. У скупу ненегативних целих бројева решити једначину

$$x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y.$$

3. Доказати да за реалне бројеве a и b важи

$$a \leq b \Rightarrow a^3 - 12a - 16 \leq b^3 - 12b + 16.$$

4. Нека су $a = BC$, $b = CA$ и $c = AB$ странице троугла $\triangle ABC$ у коме је $\sphericalangle BAC = 3 \cdot \sphericalangle ABC$. Доказати да је тада

$$bc^2 = (a - b)^2(a + b).$$

5. Многоугао који је описан око круга полупречника r разложен је на коначно много троуглова. Доказати да је сума полупречника уписаних кругова у те троуглове већа од r .

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.01.2003.

Четврти разред – Б категорија

1. Доказати да сви комплексни бројеви z , за које важи $|z - 1| = 2|z + 1|$, припадају једном кругу. Наћи центар и полупречник тог круга.
2. Наћи све просте бројеве p за које је број $7p + 1$ квадрат природног броја.
3. Наћи реална решења система једначина

$$x^2y^2 - 2x + y^2 = 0, \quad 2x^2 - 4x + 3 + y^3 = 0.$$

4. Нека је $a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1}$ аритметички низ. Доказати да важи :

$$a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 = \frac{(a_n a_{n+1})^2 - (a_1 a_0)^2}{4d},$$

где је d разлика низа.

5. Казаљке на сату су преклопљене тачно у поноћ. Када ће се следећи пут преклопити?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.