

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

01.03.2003.

Други разред – А категорија

1. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\sqrt{x^2 + x + 1} + 2\sqrt{x + 3} = \sqrt{6x^2 - 2x - 18}.$$

2. На колико начина таблица $m \times n$ може да се попуни бројевима 1 и -1 , тако да производ бројева у свакој врсти буде једнак 1, а производ бројева у свакој колони буде -1 ?
3. Дат је круг полупречника 1. У његовој унутрашњости или на граници, изабрано је 8 тачака. Доказати да међу њима постоје две, чије је растојање мање од 1. Да ли тврђење важи за 7 тачака ?
4. Тачке A, B и C припадају једној правој. Над AB, BC и AC , као пречницима, са исте стране те праве, конструисане су три полукружнице. Центар кружнице k , која додирује сваку од три дате полукружнице, налази се на растојању d од праве AC . Наћи полупречник кружнице k .
5. Троугао састављен од тежишних дужи троугла ABC сличан је троуглу ABC . Наћи коефицијент сличности.

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

01.03.2003.

Други разред – Б категорија

1. Доказати да за свако природно n , $n \geq 2$ важи неједнакост :

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n^2} > 1.$$

2. Одредити све комплексне бројеве z за које важи $|z| = \frac{1}{|z|} = |z-1|$.

3. Нека једначина $(a-1)x^2 - (a+1)x + 2a - 1 = 0$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$ има решења x_1 и x_2 . Одредити вредност параметра b , тако да производ $(x_1 - b)(x_2 - b)$ не зависи од a .

4. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1}.$$

5. У правоуглом троуглу ABC тачка D је подножје висине из теме на A на хипотенузу BC , E је средиште дужи AD , а F је пресек правих BE и AC . Ако је $BD = 4$, $CD = 9$, наћи дужину дужи BF .

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.