

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

01.03.2003.

Трећи разред – А категорија

1. Дата је једначина $x^3 - px + q = 0$, $q \neq 0$, која има три реална решења.
а) Доказати да је $p > 0$.
б) Ако је и $q > 0$, доказати да за најмањи по апсолутној вредности корен ове једначине, α , важи $|\alpha| \leq \min\left(\sqrt{\frac{p}{3}}, 3\sqrt{\frac{q}{2}}\right)$.

2. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\sqrt{1+x_1} + \sqrt{1+x_2} + \dots + \sqrt{1+x_{100}} = 100\sqrt{1+\frac{1}{100}}$$

$$\sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} + \dots + \sqrt{1-x_{100}} = 100\sqrt{1-\frac{1}{100}}.$$

3. Доказати да се у координатној равни не може нацртати конвексни четвороугао, коме је једна дијагонала два пута дужа од друге, угао између дијагонала му је 45° , а координате свих темева су цели бројеви.
4. Дата је тачка P унутар неког неког круга. Кроз тачку P постављамо две међусобно нормалне тетиве. У ком положају је збир дужина тих тетива најмањи, а у ком највећи и колике су те екстремне вредности, ако је полупречник кружнице R , а растојање тачке P од центра те кружнице d ($0 < d < R$)?

5. Нека је $a = \frac{2003}{\sqrt{2003}}$. Шта је веће $a^{a^{\dots a}}$ } 2003 пута или 2003?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

01.03.2003.

Трећи разред – Б категорија

1. Основице правоуглог трапеца у кога се може уписати круг су a и b . Израчунати површину овог трапеца.
2. У лопту је уписана пирамида, чија је основа правоугаоник дијагонале d . Бочне ивице пирамиде нагнуте су према равни основе под углом β . Наћи полупречник лопте.
3. Наћи све целе бројеве x , такве да је $\log_2(x^2 - 4x - 1)$ цео број.
4. Доказати да важи: $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$.
5. Доказати да за $p \geq 0$ важи неједнакост
 $(2003^p)^1 - 2003^p + (2003^{2p})^1 - 2003^{2p} + \dots + (2003^{2003p})^1 - 2003^{2003p} \leq 2003$.

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.